SU(n,1)の保型形式の次元公式について(群の表現と非可換調和解析)

加藤, 末広

数理解析研究所講究録
481巻 1983年 81-92

$SU(n,1)$ の保型形式の次元公式について

立教大 理　　加藤 末広
(Kato Suehiro)

この報告の目的は，Selbergの跡公式を用いて$SU(n,1)$のlatticeに対して保型形式の次元公式を求めることである。特にlevel 3以上の合同部分群$\Gamma(N)$に対してこの次元公式が適用できる。$\Gamma(N)$についての更に詳しい結果は，[9]で述べる予定である。なお今までの結果としては$SU(2,1)$に関してCohnがSelbergの跡公式を使う方法で，HemperlyがRiemann-Rochの定理を用いる方法であるnon-uniform latticeに対して保型形式の次元を計算している。またuniform latticeに対してはLanglands等により一般の半単純群で研究されている。

§1. 記号と準備

Kを虚2次体，Sを ${}^t\overline{S}=-S$ かつ $-iS>0$ となるような$GL_{n-1}(K)$の元とする。そのとき次のような$\mathbb{Q}$上定義された

代数群を考える；

$$G_{\mathbb{Q}} = \{ g \in SL_{n+1}(K) ;\ {}^t\bar{g} R g = R \}$$

$$G_{\mathbb{R}} = \{ g \in SL_{n+1}(\mathbb{C}) ;\ {}^t\bar{g} R g = R \}\text{。}$$

但し $R = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(K)$ とおく。$G_{\mathbb{R}}$ は $SU(n,1)$ に同型である。以下簡単のため $G = G_{\mathbb{R}}$ とかこう。G は type 2 の Siegel 領域 $\mathfrak{Z}$ に自然に作用する；すなわち，

$$\mathfrak{Z} = \{ \mathfrak{z} = (w, z) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} ;\ i({}^t\bar{w} S w + {}^t\bar{z} - z) > 0 \}$$

$$g\mathfrak{z} = \left(\frac{a_1 w + b_1 z + c_1}{a_3 w + b_3 z + c_3},\ \frac{a_2 w + b_2 z + c_2}{a_3 w + b_3 z + c_3} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in G \quad \left(\begin{array}{l}\text{R と同じ block} \\ \text{で分けたもの}\end{array}\right), \\ \mathfrak{z} = (w, z) \in \mathfrak{Z} \end{array} \right)$$

とおく。以下 $\mathfrak{z} = (w, z) \in \mathfrak{Z}$ に対し，$w(\mathfrak{z}) = w$，$z(\mathfrak{z}) = z$ とかく。また任意の $g \in G$，$\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ に対し，$\mu(g, \mathfrak{z}) = a_3 w + b_3 z + c_3$ と定義する。

$\mathfrak{z}_0 = (0, i) \in \mathfrak{Z}$ としよう。そのとき $K = \{ g \in G ;\ g\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_0 \}$ は極大コンパクト部分群になる。

$$A = \left\{ a(v) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) ;\ v > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ [x, y] = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & x \\ {}^t\bar{x} S & 1 & y + \frac{1}{2} {}^t\bar{x} S x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) ;\ \begin{array}{l} x \in \mathbb{C}^{n-1} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

とおく。そのときGは岩沢分解 $G=NAK$ を持つ。この分解で $g=[x,y]a(v)k$ としたとき，G上のHaar測度を次のように正規化しよう；

$$dg=\frac{dx\,dy\,dv\,dk}{v^{n+1}}。$$

ここで dx は$\mathbb{C}^{n-1}(\cong\mathbb{R}^{2(n-1)})$上のEuclidean測度，$dy$, dv は$\mathbb{R}$上のEuclidean測度，dk は$\int_K dk=1$となるように正規化されたK上のHaar測度とする。

ΓをGの離散群としよう。Γは$\Gamma\backslash G$の体積が有限のとき lattice，さらに$\Gamma\backslash G$が compact のとき，uniform lattice であるという。今 $v_0>0$ に対し，$A(v_0)=\{a(v)\in A\ ;\ v>v_0\}$ とおく。そのときNにおける1の任意の開かつ相対コンパクトな近傍ηに対して $\mathfrak{S}_{v_0,\eta}=\eta A(v_0)K\ (\subset G)$ とおく。次の補題は Garland-Raghunathan [3] によりよく知られている。

<u>補題 1.1.</u> (Garland-Raghunathan)　ΓをGの任意のlattice とする。そのとき次の条件をみたすようなある$v_0>0$，Nのある開かつ相対コンパクト集合η_0，Gの有限集合Ξ，Gの相対コンパクト集合Ωが存在する；

(i) $\Omega_{v_0,\eta_0}=\Omega\cup(\bigcup_{h\in\Xi}h\mathfrak{S}_{v_0,\eta_0})$ とおいたとき，

$$\Gamma\Omega_{v_0,\eta_0}=G$$

(ii) $\{\gamma\in\Gamma\ ;\ \gamma\Omega_{v_0,\eta_0}\cap\Omega_{v_0,\eta_0}\neq\phi\}$ は有限集合

(iii) MをKにおけるAの中心化群，$P=NAM$とする。そ

のとき，"$\gamma h\mathfrak{S}_{v_0,\gamma_0}\cap h'\mathfrak{S}_{v_0,\gamma_0}\neq\phi$ $(h,h'\in\Xi,\ \gamma\in\Gamma)\Longrightarrow$ $h=h'$，$h^{-1}\gamma h\in P$。"

<u>例 1.2.</u> $\mathcal{O}$をKの整数環，$L=\mathcal{O}\times\cdots\times\mathcal{O}$（$n+1$個）とおき，$N\in\mathbb{N}$に対し，

$$\Gamma(N)=\{\gamma\in G_{\mathbb{Q}}\ ;\ L(\gamma-1)\subset NL\}$$

と定義する。$\Gamma(N)$は合同部分群とよばれるGの離散部分群で$\Gamma(N)$は$\Gamma(1)$の正規部分群である。$\Gamma(1)$に対してはBorel [1] により上の補題のΞとして$\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}}$の完全代表系をとることができる。ここで，$P_{\mathbb{Q}}=G_{\mathbb{Q}}\cap P$。

§2. 保型形式と次元公式

$l\in\mathbb{Z}$とする。Gの lattice Γに対して，$\mathfrak{Z}$上の正則函数$F(\mathfrak{z})$が weight l のΓ-保型形式であるとは$F(\mathfrak{z})$が

$$F(\gamma\mathfrak{z})=\mu(\gamma,\mathfrak{z})^{l}F(\mathfrak{z})\qquad(\mathfrak{z}\in\mathfrak{Z},\ \gamma\in\Gamma)$$

を満たすときにいう。さらに$F(\mathfrak{z})$が条件：

$$\left(\mathrm{Im}\,z(\mathfrak{z})+\tfrac{i}{2}\,{}^t\overline{w}(\mathfrak{z})\,S\,w(\mathfrak{z})\right)^{\frac{l}{2}}F(\mathfrak{z})\ \text{は}\ \mathfrak{Z}\ \text{上有界}$$

を満たすとき，$F(\mathfrak{z})$を weight l のΓ-cusp形式という。$S_l(\Gamma)$を（weight l の）Γ-cusp形式全体としよう。$F(\mathfrak{z})\in S_l(\Gamma)$に対しG上の函数$f_F(g)$を，

$$f_F(g)=\mu(g,\mathfrak{z}_0)^{-l}F(g\mathfrak{z}_0)$$

で定義する。そのとき次の補題が成立する。

補題 2.1. $l>2n$ $(l\in\mathbb{Z})$ と仮定する。そのときG上の函数fがある$F\in S_l(\Gamma)$に対して$f=f_F$となるための必要十分条件はfが次の条件を満足することである；

(i) $f(g)$ はG上有界

(ii) $f(\gamma g k)=\mu(k,z_0)^{-l}f(g)$ $\quad(\gamma\in\Gamma,\ g\in G,\ k\in K)$

(iii) $f(h)=C_l\int_G \omega_l(g^{-1}h)f(g)\,dg$ $\quad(h\in G)$

但し，$C_l=\dfrac{(l-1)!}{2^{n+1}\pi^n(l-n-1)!}$，

$$\omega_l(g)=\mu(g,z_0)^{-l}\left(\frac{z(gz_0)+i}{2i}\right)^{-l}。$$

注意 2.2. $\omega_l(g)$は次のような意味で球函数になる；

(i) $\omega_l(kgk')=\mu(k,z_0)^{-l}\,\omega_l(g)\,\mu(k',z_0)^{-l}$

(ii) $\omega_l(1)=1$

(iii) $\omega_l(g)$はGの Casimir 作用素の固有函数である。

また上の仮定$l>2n$は$\int_G|\omega_l(g)|\,dg<\infty$なる条件である。

上の補題を使って，Selberg, Godement によるよく知られた方法に従い次の次元公式が示される。

定理 2.3. $l>2n$ $(l\in\mathbb{Z})$ と仮定する。そのときGの任意の lattice Γに対し，$\sum_{\gamma\in\Gamma}\omega_l(g^{-1}\gamma g)$ は$\Gamma\backslash G$上有界でかつ次の式が成立する；

$$\dim S_\ell(\Gamma) = C_\ell \int_{\Gamma \backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\, dg \text{。}$$

§3. 次元の計算

前定理の右辺の計算を進めるため，積分と和の順序を交換すると便利なのだが，一般にΓが non-uniform lattice の場合 parabolic 元の存在のためにそれはできない。しかし右辺の各項に1に十分近い dumping factor とよばれるある函数をかけることによりこの交換が可能となる。これは Selberg 以来次元公式を求めるのによく使われる方法である。我々はこの方法によりGのある lattice に対し次元を計算しよう。以下 $\ell > 2n$ $(\ell \in \mathbb{Z})$，ΓをGの lattice とする。

まずΓの元を次のように分類する。(i) $\gamma \in \Gamma$が central $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\gamma \in Z(\Gamma)$ ($:=\Gamma$の中心)，(ii) $\gamma \in \Gamma$が elliptic $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ γは non-central でかつKの元にG共役な semisimple 元，(iii) $\gamma \in \Gamma$が hyperbolic $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ γは non-central, non-elliptic semisimple 元，(iv) $\gamma \in \Gamma$が parabolic $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ γは non-semisimple 元。

我々は以下次の仮定(*)をみたすようなGの lattice を考察する；

(*)
(i) Γは elliptic 元を含まない。
(ii) Ξ, P, Nを補題1.1.でいうものとする。そのと

き任意の $h \in \Xi$ に対して，

$$h P h^{-1} \cap \Gamma = Z(\Gamma) \cdot h N h^{-1}$$

が成立する。

Γ がこれらの条件をみたすとき parabolic 元全体 $\Pi(\Gamma)$ に対して次のことが成立する。

補題 3.1. (Raghunathan - Warner [8]) Γ_0 を G の lattice で Γ をその正規部分群として含むようなものとする (例えば $\Gamma_0 = \Gamma$)。そのとき，

$$\Pi(\Gamma) = \bigcup_{h \in \Xi(\Gamma_0)} \bigcup_{\delta \in \Gamma_0 / \Gamma_0 \cap hPh^{-1}} \left\{ \delta h n z h^{-1} \delta^{-1} \;;\; \begin{array}{l} n \in N \cap h^{-1}\Gamma h \\ n \neq 1 \\ z \in Z(\Gamma) \end{array} \right\}$$

ここで $\Xi(\Gamma_0)$ は Γ_0 に対して補題で与えられた Ξ であり，δ は $\Gamma_0 / \Gamma_0 \cap hPh^{-1}$ の完全代表系を動くものとする。$\Pi(\Gamma)$ の上の表示の仕方は一意的である。

この事実を使って $S_\ell(\Gamma)$ の次元を計算しよう。次の補題は以下の計算に基本的である。

補題 3.2. $F(N)$ を N の $N \cap \Gamma$ における基本領域として，$L > 0$ に対して，

$$E(\infty) = \left\{ g = [x, y] \cdot a(v) \cdot k \;;\; \begin{array}{l} [x, y] \in F_N \\ v > 0, \; k \in K \end{array} \right\}$$

$$V_\infty(L) = \{ g = [x, y]\, a(v) \cdot k \in E(\infty) \;;\; v > L \}$$

とおく。そのとき十分大きな正数 L に対して次の主張が成り立つ：

(i) $\displaystyle\int_{V_\infty(L)} \sum_{\gamma\in\Gamma-(\Gamma\cap P)} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$ は項別積分可能

(ii) $$\int_{V_\infty(L)} v(g)^{-\varepsilon} \sum_{\gamma\in\Gamma\cap P} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma\in\Gamma\cap P} \int_{V_\infty(L)} v(g)^{-\varepsilon}\,\omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

(iii) $$\sum_{\gamma\in\Gamma\cap N\setminus\{1\}} \int_{E(\infty)-V_\infty(L)} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma\in\Gamma\cap N\setminus\{1\}} \int_{E(\infty)-V_\infty(L)} v(g)^{-\varepsilon}\,\omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg。$$

ここで岩沢分解に従い，$g = n\,a(v(g))\,k \in NAK$ とおいた。

上の補題の $v(g)^{-\varepsilon}$ が dumping factor とよばれるものである。

の補題によりまず，

$$\dim S_\ell(\Gamma) = C_\ell \sum_{z\in Z(\Gamma)} \int_{\Gamma\backslash G} \omega_\ell(g^{-1}zg)\,dg$$

(1) $$+\, C_\ell \sum_{\gamma:\,\text{hyperbolic}} \int_{\Gamma\backslash G} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

$$+\, C_\ell \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{h\in\Xi(\Gamma_0)} \sum_{z\in Z(\Gamma)} \sum_{\delta\in\Gamma_0/\Gamma_0\cap hPh^{-1}} \sum_{n\in h^{-1}\Gamma h\cap N\setminus\{1\}} \omega_\ell(g^{-1}\delta h n z h^{-1}\delta^{-1} g)\,dg.$$

右辺の第3項をまとめよう。次の命題は補題3.2. を使って証明される；

<u>命題3.3.</u> $\displaystyle\int_{h^{-1}\Gamma_0 h\cap N\backslash G} \Big|\sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N\setminus\{1\}} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\Big|\,dg$ が絶対収束して次の式が成り立つ；

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N\setminus\{1\}} \int_{h^{-1}\Gamma_0 h\cap N\backslash G} v(g)^{-\varepsilon}\,\omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

$$= \int_{h^{-1}\Gamma_0 h\cap N\backslash G} \sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N\setminus\{1\}} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg \qquad (h\in\Xi(\Gamma_0))。$$

この命題を使って，

$$(1)\text{の右辺の第3項} = C_\ell C_{Z(\Gamma),\ell} \sum_{h\in\Xi(\Gamma_0)} \frac{1}{W_h} \int_{G/h^{-1}\Gamma_0 h\cap N} \sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N\setminus\{1\}} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

$$(2) \qquad = C_\ell C_{Z(\Gamma),\ell} \sum_{h\in\Xi(\Gamma_0)} \frac{1}{W_h} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N\setminus\{1\}} \int_{G/h^{-1}\Gamma_0 h\cap N} \nu(g)^{-\varepsilon} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg \right\}。$$

ここで，$C_{Z(\Gamma),\ell} = \sum_{z\in Z(\Gamma)} \mu(z, z_0)^{-\ell}$，$W_h = [h^{-1}\Gamma_0 h\cap P, h^{-1}\Gamma_0 h\cap N]$。

さて(2)の右辺の計算を実行するために，Nを2つに分解して考える：

$$N_1 = \{[0,y]\in N \ ;\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}$$

$$N_2 = \{[x,y]\in N \ ;\ x\in\mathbb{C}^{n-1}\setminus\{0\},\ y\in\mathbb{R}\}。$$

そのとき，

<u>補題3.4.</u>　任意の$h\in\Xi(\Gamma_0)$に対し次式が成立；

(i) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N_1} \int_{G/h^{-1}\Gamma_0 h\cap N} \nu(g)^{-\varepsilon} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg$$

$$= vol(h^{-1}\Gamma_0 h\cap N \backslash N)\, \nu_h^{-n}\, 2^n \cdot \frac{(\ell-n-1)!}{(\ell-1)!} (2\pi)^n \zeta(1-n)。$$

ここで$\nu_h = \min\{y>0 \ ;\ [0,y]\in h^{-1}\Gamma h\cap N\}$とおいた。また$\zeta(s)$はRiemann zeta函数。

(ii) $$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\gamma\in h^{-1}\Gamma h\cap N_2} \int_{G/h^{-1}\Gamma_0 h\cap N} \nu(g)^{-\varepsilon} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\,dg = 0。$$

特に，nが$n>1$なる奇数ならば$\Pi(\Gamma)$の，$S_\ell(\Gamma)$の次元公式への寄与はzero。

（証明はCauchyの積分定理や共役類の構造を調べることな

どより得られる。)

以上で$\Pi(\Gamma)$の, $S_\ell(\Gamma)$の次元公式への寄与が計算された。*hyperbolic* 元については次の補題が成り立つ。

<u>補題 3.5.</u>

$$\sum_{\gamma:\,hyperbolic} \int_{\Gamma\backslash G} \omega(g^{-1}\gamma g)\, dg = 0$$

(証明) 容易に示されるように

$$\sum_{\gamma\in hyperbolic} \int_{\Gamma\backslash G} \omega(g^{-1}\gamma g)\, dg = \sum_{\{\gamma\}:\,hyperbolic} vol(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma) \int_{G_\gamma\backslash G} \omega(g^{-1}\gamma g)\, dg.$$

但し, G_γ, Γ_γはそれぞれ$\gamma\in\Gamma$のG, Γにおける中心化群で, 右辺の和はΓの *hyperbolic* 元の(Γにおける)共役類全体を動く。従って注意 2.2. により, 補題は Harish-Chandra [4] で与えられた Selberg の原理を$\omega(g)$に適用することから得られる。

q. e. d.

以上をまとめて次の定理を得る;

<u>定理 3.6.</u> $\ell > 2n$ ($\ell\in\mathbb{Z}$), ΓをGの lattice で(*)の条件を満たすとする。Γ_0をGの lattice でΓをその正規部分群として含むものとする。そのとき次の次元公式が成立する;

$$\dim S_\ell(\Gamma) = C_{Z(\Gamma),\ell}[\Gamma_0,\Gamma]\frac{(\ell-1)!}{2^{n+1}\pi^n(\ell-n-1)!}\, vol(\Gamma_0\backslash G)$$
$$+ C_{Z(\Gamma),\ell}[\Gamma_0,\Gamma]\sum_{k\in\Xi(\Gamma_0)} vol(k^{-1}\Gamma_0 k\cap N\backslash N)\, w_k^{-1} v_k^{-n} 2^{n-1}\zeta(1-n).$$

特に, nが$n>1$なる奇数ならば右辺の第2項$=0$。ここで

$\Xi(\Gamma_0)$ は Γ_0 に対し補題1.1.で与えられた有限集合，$C_{Z(\Gamma),\ell}=\sum_{z\in Z(\Gamma)}\mu(z,\mathfrak{z}_0)^{-\ell}$，$v_h=\min\{y>0;\ [0,y]\in N\cap h^{-1}\Gamma h\}$，$w_h=[h^{-1}\Gamma_0 h\cap P,\ h^{-1}\Gamma_0 h\cap N]$，$\zeta(s)$ は Riemann zeta 函数である。

例 3.7.　Γ として例1.2.における $\Gamma(N)$ をとろう。但し，$N\geqq 3$ とする。そのとき，$\Gamma(N)$ は $(*)$ の条件 (i)(ii) をみたし，かつ $Z(\Gamma)=\{1\}$ である。よって定理3.6.が $\Gamma=\Gamma(N)$，$\Gamma_0=\Gamma(1)$ に対して適用できる；

$$\dim S_\ell(\Gamma(N))=[\Gamma(1),\Gamma(N)]\frac{(\ell-1)!}{2^{n+1}\pi^n(\ell-n-1)!}\mathrm{vol}(\Gamma(1)\backslash G)$$
$$+[\Gamma(1),\Gamma(N)]\sum_{h\in\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}}}\mathrm{vol}(h^{-1}\Gamma(1)h\cap N\backslash N)\,w_h^{-1}v_h^{-n}2^{n-1}\zeta(1-n)。$$

最初に述べたように $\Gamma(N)$ についての次元公式はさらに[9]で述べる予定である。

定理3.6.の応用として次の命題がいえる。結果はすでに一般的に Mumford [6] によって知られている。

定理3.6.の系.　Γ,Γ' を任意の lattice とする。そのとき，$\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)$，$\mathrm{vol}(\Gamma'\backslash G)$ の比は有理数である。

証明は条件 $(*)$ をみたす lattice Γ に対して定理3.6.を適用し，

$$C_{Z(\Gamma),\ell}\frac{n!}{2^{n+1}\pi^n}\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G)\in\mathbb{Z}$$

を示すことにより得られる。

参 考 文 献

〔1〕 A. Borel, Reduction theory for arrithmetic groups, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, 20-25.

〔2〕 L. Cohn, The dimension of spaces of automorphic forms on a certain two dimensional complex domain, Memoirs Amer. Math. Soc., No 158, Providence, Rhode Island, 1975.

〔3〕 H. Garland and M. S. Raghunathan, Fundamental domains for lattices in (R)-rank 1 semi-simple groups, Ann. of Math. 92 (1970), 279-326.

〔4〕 Harish-Chandra, Discrete series for semi-simple Lie groups II. Explicit determination of the characters, Acta Math. 116 (1966), 1-111.

〔5〕 J. C. Hemperly, The parabolic contribution to the number of linearly independent automorphic forms on a certain bounded domain, Amer. J. of Math. 94 (1972) 1078-1100.

〔6〕 D. Mumford, Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case, Inventiones Math. 42 (1977), 239-272.

〔7〕 A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47-87.

〔8〕 G. Warner, Selberg's trace formula for non-uniform lattices: The R-rank one case, Advances in Math. Studies, vol. 6 (1979), 1-142.

〔9〕 加藤末広, $SU(n,1)$ の保型形式の次元公式について ($\Gamma=\Gamma(N)$ $(N\geqq 3)$ の場合), 概均質ベクトル空間とその周辺 (82年), 数理研講究録, to appear.